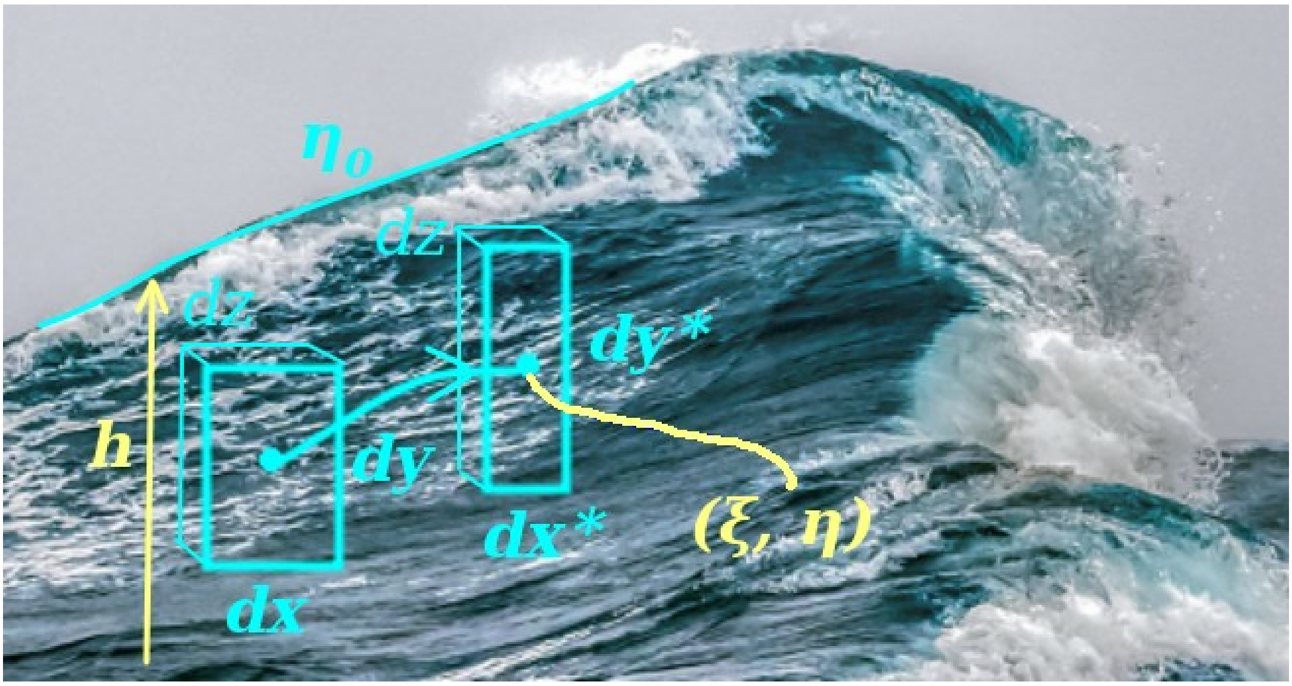
Fale morskie

– zagadnienie lokalnego ruchu masy wody

powodującego makroskopową propagację fali



Rozważmy następujący obraz. Umownie wydzielony fragment masy wody o objętości *dx dy dz,* pod wpływem siły działającej w płaszczyźnie rysunku, przemieszcza się lokalnie i deformuje do objętości *dx* dy* dz.* Wymiar *z,* prostopadły do obrazka i wystający z kartki, jest pod kątem prostym do działających sił i nie ulega żadnym deformacjom ani ewolucji.

Umowny środek naszego elementu wody ma współrzędne (ξ, η) i przemieszcza się wraz z nim. Będziemy starali się prześledzić jego ruch, to znaczy podać w postaci równania zmiany ξ oraz η w funkcji czasu oraz w zależności od różnych położeń x i y (o ile od nich zależą).

Funkcję η, opisująca kształt powierzchni wody – tzn. η elementów wody leżących przy samej powierzchni, nadających kształt fali, oznaczymy – tak jak na obrazku – η_0 i przypiszemy im lokalną wysokość $y = h$ ponad dnem (samo dno znajduje się na wysokości $y = h = 0$).

Gdyby deformacja elementu objętości *dx dy dz* pod wpływem zewnętrznych sił (np. pływowych od Księżyca, wiatru albo prądów morskich) nie następowała wcale, wówczas nie formowałaby się fala, tylko tafla wody miałaby równy i jednostajny kształt płaski, zgodny z gradientem hydrostatycznym. W naszym przypadku, pozwalamy zewnętrznej sile uformować falę i następnie puszczamy ją bez strat i przy milczącym założeniu stałego uzupełniania energii w kierunkach jej propagacji, jak gdyby początkowa deformacja miała niewyczerpany zasób energii na wymuszenie falowania w kolejnych masach wody. Faktycznie, w rzeczywistości, np. wiatr musi wiać stale, aby uzupełniać straty energii mechanicznej tarcia oraz wiać na większym obszarze, aby kolejne połacie wody miały tyle samo energii do uformowania swojej fali (tę samą amplitudę kołysania się wody) – inaczej, fala rozchodząca się na coraz większym obszarze bez nowych źródeł energii, musiałaby wytracać swoją amplitudę (gdyż ta sama początkowa energia rozkładałaby się na coraz większy obszar wód), aż do jej zupełnego wygaszenia. Tak dzieje się np. z falą wywołaną pojedynczym aktem ciśnięcia kamienia do jeziora (albo pojedynczym szarpnięciem struny, która stopniowo cichnie aż zamilknie, chyba, że smyczek ciągle dostarcza jej energii przez swój stały, posuwisty ruch po niej).

W kierunku x wywołana zostaje deformacja

$$dx \rightarrow dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \quad ,$$

gdzie pochodna cząstkowa $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ opisuje, jak szybko położenie elementu wody ξ zmienia się wraz z przesunięciem po x (czyli: jak intensywnie następuje rozciąganie się lub skupianie się elementu masy wody na tym kierunku), która, razy owo przesunięcie dx, którym dysponujemy, da nam całkowitą zmianę długości w kierunku x. Analogicznie,

$$dy \rightarrow dy + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \quad .$$

W mocy pozostaje wymóg nieściśliwości cieczy: nasz fragment masy po deformacji zajmuje siłą rzeczy tę samą objętość, którą zajmował przed deformacją (gdyż jego gęstość nie mogła ulec zmianie). Rozciągnięcie w jednej zmiennej musi być zrekompensowane ściśnięciem w drugiej; spodziewamy się zatem związku w rodzaju $\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial \xi}{\partial x}$. I rzeczywiście, jest bowiem:

$$dx\ dy\ dz = dx^*\, dy^*\, dz = dx\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dy\left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dz = dx\ dy\ dz\ \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right).$$

Ostatni wyraz jest małą wyższego (drugiego) rzędu, gdyż szybkości są stosunkowo nieduże, a zatem zaniedbujemy go w stosunku do wyrazów pierwszego rzędu. To pozostawia nas z równością

$$1 \ = \ 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$
$$\Rightarrow \ \frac{\partial \eta}{\partial y} \ = \ -\frac{\partial \xi}{\partial x} \ .$$

Jeśli fala jest dostatecznie długa i uformowana, jej grzbiet i podstawa będą poruszać się w kierunku propagacji fali mniej więcej z taką samą prędkością w obrębie jej wysokości. Nie mówimy tu ogólnie o ruchu mas wody na różnych głębokościach, tylko o pojedynczej fali – elementach wody znajdujących się jeden nad drugim i tworzących pojedyncze zjawisko fali. Gdyby tak nie było, fala aktywnie zmieniałaby kształt, rozpraszając się na swojej drodze. Nie zajmujemy się tutaj falą krótką i przejściową, lecz dostatecznie trwałą, której przetoczenie się przez dane położenie *x* zajmuje pewien czas.

W konsekwencji, nasza zmienna ξ opisująca położenie elementu wody w fali jest tylko funkcją *x* oraz czasu, nie zależy zaś jawnie od *y*. Gdyby więc wyrażenie z ξ (np. to powyżej) scałkować po *y*, zachowywałoby się ono jak stała:

$$\partial \eta \ = \ -\frac{\partial \xi}{\partial x} \partial y \ \Rightarrow \ \eta \ = \ -\frac{\partial \xi}{\partial x} y \ .$$

Ta ważna zależność między ξ i η jest prostą konsekwencją nieściśliwości elementu wody.

Na odcinku *dx* kształt powierzchni fali, oznaczony przez nas jako η_0, zmienia się o $\frac{\partial \eta_0}{\partial x} dx$. Jeśli pochodna jest dodatnia, fala przyrasta w tymże kierunku (na obrazkach: w prawo). A zatem, pomiędzy słupami wody leżącymi na początku i na końcu odcinka *dx* musi wytworzyć się różnica ciśnienia hydrostatycznego, wynikającego z różnicy ich wysokości:

$$dp \ = \ \rho \ g \ \frac{\partial \eta_0}{\partial x} dx \ .$$

Ciśnienie to działa na powierzchnię *dy dz* z siłą

$$F_x \ = \ -\rho \ g \ \frac{\partial \eta_0}{\partial x} dx \ dy \ dz \ .$$

Znak minus pokazuje, że siła hydrostatyczna dąży do cofnięcia (przesunięcia w lewo) nadwyżki wody tak, aby wyrównać jej poziom i zrównoważyć tym samym ciśnienia. Biorąc pod uwagę, że powierzchnia fali wypada na wysokości $y = h$ powyżej dna, a więc $\eta_0 = -\frac{\partial \xi}{\partial x} h$, możemy wypisać dynamiczne równanie ruchu elementu masy $m = \rho\, dx\, dy\, dz$ wody, aby ostatecznie znaleźć jego ruch.

$$m\, a_x = F_x$$
$$\rho\, dx\, dy\, dz \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\rho\, g \frac{\partial}{\partial x}[-h \frac{\partial \xi}{\partial x}]\, dx\, dy\, dz$$
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g\, h \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad ,$$

Jest to klasyczne czasowo-przestrzenne równanie falowe $[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2]\, \psi(\vec{r}, t) = 0$, którego rozwiązaniem jest fala propagująca się przestrzennie i oscylująca w danym położeniu,

$$\xi(x,t) = A \cos(kx - \omega t) = A \cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x - v_{fali} t)] \quad .$$

Różniczkując bez większego trudu to równanie dwukrotnie po *x* i dwukrotnie po *t*, otrzymujemy – w konsekwencji równania falowego – I związek dyspersyjny: $v_{fali} = \sqrt{g\, h}$. Fale mogą propagować się z tym większą prędkością, nad im głębszym akwenem wody powstają.

Jeszcze raz powołując się na związek wynikający z nieściśliwości, $\eta = -y \frac{\partial \xi}{\partial x}$, obliczamy, poprzez pojedyncze zróżniczkowanie ξ (*x, t)* po *x*, także i zmienną η:

$$\eta(x, y, t) = A \frac{2\pi}{\lambda}\, y\, \sin[\frac{2\pi}{\lambda}(x - v_{fali} t)] \quad .$$

Amplituda wahań w kierunku *y* zależy wprost od odległości od dna (*y*) i przy samym dnie nie występują w tym kierunku żadne drgania, co jest słuszne i oczywiste.

Podnieśmy ξ i η do kwadratu:

$$\xi^2 = A^2 \cos^2[\frac{2\pi}{\lambda}(x - v_{fali} t)]$$
$$\eta^2 = A^2 (\frac{2\pi}{\lambda})^2 y^2 \sin^2[\frac{2\pi}{\lambda}(x - v_{fali} t)] \quad .$$

Dzieląc każde z równań przez kwadrat zawartej w nim amplitudy i dodając obie równości stronami, otrzymujemy, na mocy jedynki trygonometrycznej

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{A^2 (\frac{2\pi}{\lambda})^2 y^2} = 1 \quad ,$$

co stanowi równanie elipsy, po której porusza się środek fragmentu wody o współrzędnych (ξ, η) , znajdujący się na wysokości *y* od dna. Półoś zgodna z kierunkiem *x* jest stała, półoś w kierunku *y* rośnie od zera przy dnie do wartości maksymalnej przy grzbiecie fali na powierzchni.

Należy zwrócić uwagę, że fala powstaje poprzez przekazywanie sobie przez kolejne elementy wody oscylacji harmonicznych wokół położenia równowagi. Wszystkie elementy wody, biorące udział w tworzeniu się fali, nigdy nie opuszczają swego zamkniętego eliptycznego toru, a pomimo tego fala propaguje się w skali makroskopowej, liczonej w metrach i dziesiątkach metrów, w danym kierunku. Ruch fali nie jest związany z fizycznym transportem wody zawartej w fali coraz dalej i dalej: woda w fali wciąż się wymienia, a porusza się w dal samo zaburzenie z położenia równowagi.

Analogicznie jest z propagacją drgania w strunie lub w dźwięku w powietrzu, z falą radiową w próżni lub powietrzu albo z prądem w przewodniku – w kablu wcale nie płyną w dal elektrony, które są nośnikiem ładunku (ich prędkość dryfu w przewodniku to zaledwie około 2 cm/s), tylko propaguje się – z prędkością światła – zaburzenie pola elektromagnetycznego, wywołane ich oscylacjami.

Warto zauważyć, że na podobnej zasadzie istnieją ramiona naszej Galaktyki – gwiazdy wciąż wpływają do nich, ulegając zagęszczeniu, a z drugiej strony ulatują z nich, rozpraszając się. Skład każdego ramienia Galaktyki wciąż się zmienia, a pomimo to ramię jest zjawiskiem stacjonarnym i stałym (przynajmniej w skali historii ludzkości).

Autor: Marek Pietrachowicz.